子流形上的积分

毕铭昊

数学分析 Seminar

2020 年 10 月 24 日

定义

设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 的子集,$\mathcal{O}=\{O_i \mid i\in I\}$ 是 K 的开覆盖. 对于 $k\in\mathbb{N}$, 将 K 从属于 $\mathcal{O}$ 的一个 C^k **单位分解**定义为有限的函数族 $\chi_j:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, 其中 $1\le j\le l$, 并且满足以下条件

1. χ_j 为 C^k 函数, 对于 $1\le j\le l$;
2. $0\le\chi_j(x)\le 1$, 对于 $x\in\mathbb{R}^n$;
3. 对任意 $1\le j\le l$, 存在 $O\in\mathcal{O}$, 使得 $\mathrm{supp}(\chi_j)\subset O$;
4. $\sum_{1\le j\le l}\chi_j(x)=1$, 对于 $x\in K$.

定理

对 $\mathbb{R}^n$ 的任意紧集 K, 以及 K 的任意开覆盖 $\mathcal{A}$, 存在 K 从属于 $\mathcal{A}$ 的一个 C^∞ 单位分解.

定义

对于 $\mathbb{R}^n$ 中的 d 维子流形 V, 考虑 C^k 嵌入 $\phi : D_\phi \to \mathbb{R}^n$, 其中 $k \geq 1$, D_ϕ 为 $\mathbb{R}^d$ 中的的开集, 且 $V = \phi(D_\phi)$. 那么对于 V 上的函数 f, 定义 V 上的第一型曲面积分

$$\int_V f(x)\,d_d x = \int_{D_\phi} (f \circ \phi)(y)\omega_\phi(y)\,dy,$$

其中 $\omega_\phi(y) = \sqrt{\det(D\phi(y)^t \cdot D\phi)}$. 称 $\omega : \phi \mapsto \omega_\phi$ 为 V 上的 d 维欧氏密度.

定义

设 $v_1, \cdots, v_{n-1}$ 为 n 维列向量. 由 Riesz 表示定理, 存在唯一的 n 维列向量 w, 使得 $\det(v \ v_1 \ \cdots \ v_{n-1}) = \langle w, v\rangle$, 定义其为 $v_1, \cdots, v_{n-1}$ **的叉积** (cross product), 记为 $w = v_1 \times \cdots \times v_{n-1}$.

引理

设 $V = (v_1 \ \cdots \ v_{n-1})$, 则 $\|w\| = \sqrt{\det(V^t V)}$.

证明

设 $A = (w \ v_1 \ \cdots \ v_{n-1})$. 由 $\langle w, v_i\rangle = 0$, 其中 $1 \le i \le n-1$, 从而

$$\|w\|^4 = (\det A)^2 = \det A^t \det A = \det A^t A$$

$$= \begin{vmatrix} \langle w,w\rangle & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \langle v_1,v_1\rangle & \cdots & \langle v_1,v_{n-1}\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \langle v_{n-1},v_1\rangle & \cdots & \langle v_{n-1},v_{n-1}\rangle \end{vmatrix} = \|w\|^2 \det(V^t V).$$

设 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, $\partial\Omega$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的 $(n-1)$ 维 C^k 流形. 那么对任意 $x^0 \in \partial\Omega$, 存在 x^0 在 $\mathbb{R}^n$ 中的开邻域 U, $\mathbb{R}^{n-1}$ 中的开集 D, 和 C^k 嵌入 $\phi : D \to \mathbb{R}^n$ 满足

$$\partial\Omega \cap U = \mathrm{im}(\phi) = \{\phi(y) \mid y \in D\}.$$

对于 $x = \phi(y) \in \partial\Omega \cap U$, 矩阵 $D\phi(y)$ 的列向量构成了切空间 $T_x(\partial\Omega)$ 的一组基. 设 $x^0 = \phi(y^0)$, 任意取 $v \notin T_{x_0}(\partial\Omega)$, 从而 $\det(v \mid D\phi(y^0)) \neq 0$. 现在定义

$$\Psi : \mathbb{R} \times D \to \mathbb{R}^n \quad (t, y) \mapsto tv + \phi(y).$$

由于 $D\phi(t, y) = (v \mid D\phi(y^0))$, 从而 $\det D\phi(t, y) \neq 0$, 由局部逆映射定理, 存在 $\delta > 0$, 并适当收缩 D 和 U, 使得

$$\Psi : (-\delta, \delta) \times D \to U$$

是开集的 C^k 微分同胚, 并且满足 $\partial\Omega \cap U = \Psi(\{0\} \times D)$.

定义

对于 $\mathbb{R}^n$ 中的开集 Ω, 以及点 $x^0 \in \partial\Omega$. 称 Ω 在 x^0 处有 C^k 边界 $\partial\Omega$ 并且位于其单侧, 若其满足如下性质, 沿用之前的记号, 存在 U, Ψ, δ, D 使得

$$\Omega \cap U = \Psi((-\delta, 0) \times D) = \{tv + \phi(y) \mid -\delta < t < 0, y \in D\}.$$

特别地, 若对任意 $x^0 \in \Omega$ 上述条件均成立, 则称 Ω 具有 C^k 边界 $\partial\Omega$ 且位于其单侧.

定义

对于 $x \in \Omega, v \notin T_x(\partial\Omega)$, 存在曲线 γ, 使 $\gamma(0) = x, D\gamma(0) = v$.
若存在 $\delta > 0$, 使得

$$\gamma(t) \in \Omega \quad (-\delta < t < 0), \quad \gamma(t) \notin \overline{\Omega} \quad (0 < t < \delta)$$

则称 v 指向 Ω 的外侧.
若存在 $\delta > 0$, 使得

$$\gamma(t) \notin \overline{\Omega} \quad (-\delta < t < 0), \quad \gamma(t) \in \Omega \quad (0 < t < \delta)$$

则称 v 指向 Ω 的内侧.
从而可以定义外法向量和内法向量.

引理

沿用之前的记号. 考虑在 $\phi(y) = x \in \partial\Omega$ 处的法向量 $v(x)$, 则

$$v(\phi(y)) = \|(D_1\phi \times \cdots \times D_{n-1}\phi)(y)\|^{-1}(D_1\phi \times \cdots \times D_{n-1}\phi)(y).$$

1 复习

2 单侧开集

3 全导数的积分
- 标准形式
- 加强形式

4 应用

定理

设 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中的有界开集, 并且有 C^1 边界 $\partial\Omega$ 且位于其单侧. 设 $v(y)^t$ 为 $y \in \partial\Omega$ 处的外法向量, 视为行向量. 用 $d_{n-1}y$ 表示在 $n-1$ 维 C^1 流形 $\partial\Omega$ 处的第一型曲面积分. 设 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ 为 C^1 函数, 并且 f 及其全导数 $Df : \Omega \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$ 均可以被延拓为 $\overline{\Omega}$ 上的连续函数. 那么

$$\int_\Omega Df(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} f(y)v(y)^t\,d_{n-1}y. \tag{1}$$

分析

等价于证明对任意的列向量 $v \in \mathbb{R}^n$, 成立

$$\int_\Omega Df(x)v\,dx = \int_{\partial\Omega} f(y)\langle v(y), v\rangle\,d_{n-1}y. \tag{2}$$

证明

首先证明, 对每个 $x \in \overline{\Omega}$, 存在 x 的开邻域 U_x, 使得对函数 f, 若 f 满足定理条件且 $\mathrm{supp}(f) \subset \overline{\Omega} \cap U_x$, 则等式 (2) 对将 Ω 替换为 $\overline{\Omega} \cap U_x$ 成立. 由于等式 (2) 两侧关于 v 都是线性的, 因此只需证明公式对 $\mathbb{R}^n$ 的一组基作为 v 成立.

情况 1

设 $x \in \Omega$, 由于 Ω 为开集, 故存在向量 $a, b \in \Omega$, 使得 $x \in U_x := \{y \in \mathbb{R}^n \mid a_j < y_j < b_j (1 \leq j \leq n)\} \subset \Omega$, 并且 $U_x \cap \partial\Omega = \varnothing$. 我们选择标准基, 即 $v = e_j (1 \leq j \leq n)$. 设函数 f 满足定理条件且 $\mathrm{supp}(f) \subset U_x \subset \Omega$. 那么

$$\begin{aligned}\int_\Omega D_j f(x)\, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} D_j f(x)\, dx \\ &= \int \cdots \int \int D_j f(x)\, dx_j\, dx_1 \cdots dx_{j-1}\, dx_{j+1} \cdots dx_n.\end{aligned}$$

考虑固定 $(x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_n)$, 那么若 $f(x_1, \cdots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \cdots, x_n) \neq 0$, 则 $a_j < x_j < b_j$, 因此考虑对 $x_j \mapsto f(x_1, \cdots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \cdots, x_n)$ 在 $[a_j, b_j]$ 上使用微积分基本定理, 因此

$$\begin{aligned}&\int D_j f(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_n)\, dx_j\\ =&f(x_1, \cdots, b, \cdots, x_n) - f(x_1, \cdots, a, \cdots, x_n) = 0 - 0.\end{aligned}$$

从而

$$\int_\Omega D_j f(x)\, dx = 0.$$

由于在 $\partial\Omega$ 上 $f \equiv 0$, 因此

$$\int_{\partial\Omega} f(y) v_j(y)\, d_{n-1} y = 0.$$

情况 2

设 $x \in \partial\Omega$. 选取 $T_x(\partial\Omega)$ 一组基 $(h_1, \cdots, h_{n-1})$, 选取 $v_0 \notin T_x(\partial\Omega)$. 定义 $v_1 = h_1 + v_0, \cdots, v_{n-1} = h_{n-1} + v_0, v_n = v_0$, 我们得到了每一个向量都不属于 $T_x(\partial\Omega)$ 的一组基 $(v_1, \cdots, v_n)$. 若需要则取其相反方向, 使得这组基均指向 Ω 的外侧.
由单侧开集定义, 存在 x 的邻域 $U = U(v)$, 映射 $\Psi : (-\delta, 0) \times D \to \Omega \cap U$ 定义为 $\Psi(t, y) = tv + \phi(y)$. 设函数 f 满足定理条件且 $\mathrm{supp}(f) \subset \overline{\Omega} \cap U$. 那么

$$\int_\Omega Df(x)vdx = \int_{(-\delta,0)\times D} Df(\Psi(t,y))v \det|D\Psi(t,y)|dtdy.$$

由链式法则, 得到

$$Df(\Psi(t,y))v = Df(\Psi(t,y))\frac{\partial\Psi}{\partial t}(t,y) = \frac{\partial(f\circ\Psi)}{\partial t}(t,y).$$

计算得到

$$|\det D\Psi(t,y)| = \langle v, (D_1\phi \times \cdots \times D_{n-1}\phi)y\rangle \quad ((t,y)\in \mathbb{R}\times D).$$

从而

$$\begin{aligned}
&\int_D \int_{-\delta}^0 \frac{\partial(f\circ\Psi)}{\partial t}(t,y)\,dt\langle v, (D_1\phi \times \cdots \times D_{n-1}\phi)y\rangle dy \\
=& \int_D (f\circ\Phi)(0,y)\langle v, (D_1\phi \times \cdots \times D_{n-1}\phi)y\rangle dy \\
=& \int_D (f\circ\phi)(y)\langle v(\phi(y)), v\rangle \omega_\phi(y)\,dy \\
=& \int_{\partial\Omega\cap U} f(y)\langle v(y), v\rangle d_{n-1}y.
\end{aligned}$$

取 $U_x = \bigcap_{1\le j\le n} U(v_j)$ 即可.

由于 $\overline{\Omega}$ 为紧集，故存在从属于开覆盖 $\{U_x \mid x \in \overline{\Omega}\}$ 的 C^∞ 单位分解 $\{\chi_i \mid i \in I\}$，满足 $\mathrm{supp}(\chi_i) \subset U_i$. 从而对 $\chi_i f(i \in I)$ 分别代入两种情况中，对 $i \in I$ 求和得到

$$\int_\Omega Df(x)v dx = \sum_{i\in I} \int_{\partial(U_i \cap \overline{\Omega})} f(y)\langle v(y), v\rangle d_{n-1}y.$$

注意到等式右边在不属于 $\partial\Omega$ 的区域上均有 $\chi_i f = 0$，从而右边的积分求和恰为 $\displaystyle\int_{\partial\Omega} f(y)\langle v(y), v\rangle d_{n-1}y$.

综上所述，等式 (2) 成立，定理得证.

定理

设 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中的有界开集, 并且有边界 $\partial\Omega$. 设 S 为 $\partial\Omega$ 的闭子集, 并且 S 为 $(n-1)$ 维可忽略集, 且 $W = \partial\Omega \setminus S$ 为 $(n-1)$ 维 C^1 流形, 并且 Ω 在 W 上的每一点都在单侧. 设 $v(y)^t$ 为 $y \in \partial\Omega$ 处的外法向量, 视为行向量. 用 $d_{n-1}y$ 表示在 $n-1$ 维 C^1 流形 $\partial\Omega$ 处的第一型曲面积分. 设 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ 为 C^1 函数, 且可延拓为 $\overline{\Omega}$ 上的连续函数. f 的全导数 $Df : \Omega \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$ 连续并且在 Ω 上绝对黎曼可积.

$$\int_\Omega Df(x)\,dx = \int_W f(y)v(y)^t d_{n-1}y. \tag{3}$$

条件

对任意 $\epsilon > 0$ 和 S 的任意开邻域 U, 存在 S 的开邻域 U' 和 $\chi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ 满足

$$U' \subset U, \quad 0 \leq \chi \leq 1, \quad , \chi = 1 \text{ on } U', \quad \operatorname{supp}(\chi) \subset U,$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi(x)\,dx < \epsilon, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \|\operatorname{grad}\chi(x)\|\,dx < \epsilon. \tag{$*$}$$

证明

由于 $\operatorname{supp}((1-\chi)f) \cap S = \varnothing$, 因此由定理得到

$$\int_{\Omega} D_j((1-\chi)f)(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} ((1-\chi)fv_j)(y)\,d_{n-1}y. \tag{4}$$

设 $\|\cdot\|$ 为一致范数, 即 $\|g\| = \sup\{|g(x)| \mid x \in \Omega\}$. 那么

$$\left|\int_\Omega D_j(\chi f)(x)\,dx\right| \le \int_\Omega |(D_j\chi)(x)||f(x)|\,dx + \int_\Omega \chi(x)|(D_j)f(x)|\,dx$$
$$\le \|f\| \int_\Omega |(D_j\chi)(x)|\,dx + \|D_jf\| \int_\Omega \chi(x)\,dx$$
$$< \epsilon(\|f\| + \|D_jf\|).$$

从而在等式 (4) 取 $\epsilon \to 0^+$, $U \to S$, 即得到等式 (3).

定义

设 S 为 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集, 定义

$$S_\delta = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists x \in S(\|x-y\| \le \delta)\}.$$

称 S 是 $(n-1)$ 维可忽略集, 如果

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\text{outer measure}(S_\delta)}{\delta} = 0.$$

结论

$\mathbb{R}^n$ 中的 $(n-2)$ 维流形的紧子集是 $(n-1)$ 维可忽略集.

定理

设 $S \subset \mathbb{R}^n$ 为 $(n-1)$ 维可忽略集, 那么 S 满足条件 $(*)$.

证明 (概要)

对 S 的任意开邻域 U, 存在 $\delta > 0$, 使 $S \subset S_{5\delta/2} \subset U$.
构造连续函数 $\chi_\delta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 满足

$$0 \le \chi_\delta \le 1, \quad \chi_\delta = 1 \text{ on } S_\delta, \quad \operatorname{supp}(\chi_\delta) \subset S_{2\delta}.$$

构造 C^1 函数 $\psi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ 满足

$$\psi \ge 0, \quad \psi(x) = 0(\|x\| \ge 1), \quad \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\,dx = 1.$$

定义

$$\chi_{\delta,\delta/2}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi((\delta/2)^{-1}x - y)\chi_\delta((\delta/2)y)\,dy.$$

则 $\|\chi_{\delta,\delta/2}(x)\| \le \|\chi_\delta(x)\| = 1$, 且 $\chi_{\delta,\delta/2}(x) = 1, x \in \operatorname{int}(S_{\delta/2})$, 且 $\operatorname{supp}(\chi_{\delta,\delta/2}) \subset S_{5\delta/2}$. 对于 ϵ, 由 S 为可忽略集, 令 $\delta \to 0^+$ 即可.

1. 复习
2. 单侧开集
3. 全导数的积分
4. 应用
   - 分部积分
   - 高斯散度定理

分部积分公式

设 Ω 和 f 满足定理的条件, 且 g 满足和 f 相同的条件, 那么对于 $1 \le j \le n$, 成立

$$\int_{\Omega} D_j f(x) g(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} (fg)(y) v_j(y)\, d_{n-1} y - \int_{\Omega} f(x) D_j g(x)\, dx.$$

证明

对 fg 使用定理, 并使用求导的莱布尼茨法则即得证.

格林第一公式

$$\int_\Omega (g\Delta f)(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} \left(g\frac{\partial f}{\partial v} \right)(y)\,d_{n-1}y - \int_\Omega \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g\rangle(x)\,dx.$$

格林第二公式

$$\int_\Omega (f\Delta g - g\Delta f)(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} \left(f\frac{\partial g}{\partial v} - g\frac{\partial f}{\partial v} \right)(y)\,d_{n-1}y.$$

定理

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界开集且 $f \in C(\Omega)$ 和 $g \in C(\partial\Omega)$, 则 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta u = f, & x \in \Omega, \\ u = g, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

至多存在一个解 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

证明

假设存在两个解 u_1, u_2, 则令 $w = u_1 - u_2$. 从而 w 满足

$$\begin{cases} \Delta w = 0, & x \in \Omega, \\ w = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

代入格林第一公式得到

$$\int_\Omega \|\operatorname{grad} u(x)\|^2 \, dx = 0.$$

从而 $w(x) = 0, x \in \overline{\Omega}$, 至多有一个解.

定理

设 Ω 满足定理的条件,$f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ 为向量场其每个分量函数 f_i 均满足定理的条件, 那么

$$\int_\Omega \operatorname{div} f(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} \langle f, v\rangle(y)\,d_{n-1}y.$$

证明

对 $1\le i\le n$, 对 f_i 使用定理, 考虑第 i 个分量, 得到

$$\int_\Omega D_i f_i(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} f_i(y)v_i(y)\,d_{n-1}y, \quad 1\le i\le n.$$

对 $1\le i\le n$ 求和即得证.