Differentiation
微分

MatrixBi

数学分析 Webinar

2020 年 4 月 25 日

1. 线性映射
2. 伴随
3. 可微映射
4. 高阶微分
5. 含参变量的积分

线性映射

定义

从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^p$ 的**线性映射**是具有以下性质的映射 $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$:

- 对所有 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 都有 $A(x+y) = A(x) + A(y)$;
- 对所有 $\lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$ 都有 $A(\lambda x) = \lambda A(x)$.

从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^p$ 的所有线性映射构成集合记为 $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.

线性映射的矩阵

定义

设 $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, 并设 $(e_1, \cdots, e_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准基, $(e_1', \cdots, e_p')$ 是 $\mathbb{R}^p$ 的标准基. 对于 $1 \le j \le n$,

$$Ae_j = \sum_{1 \le i \le p} a_{ij} e_i' \quad \text{then } A \text{ has the matrix } \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}$$

一些记号

定义

所有 $p \times n$ 的实矩阵构成的集合记为 $\mathrm{Mat}(p \times n, \mathbb{R})$, 它是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间.
对于 $n = p$ 的特殊情况. 定义为

$$\mathrm{End}(\mathbb{R}^n) := \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \quad \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) := \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}).$$

考虑 $\mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ 中可逆的线性映射及其对应的矩阵, 定义为

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n) \subset \mathrm{End}(\mathbb{R}^n), \quad \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \subset \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}).$$

$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 被称为 $\mathbb{R}$ 上的 n 阶**一般线性群**.

一些记号

定义

$\mathbb{R}$ 上行列式为 1 的 n 阶方阵集合

$$\mathsf{SL}(n,\mathbb{R}) := \{A \in \mathsf{GL}(n,\mathbb{R}) : \det A = 1\}$$

构成 $\mathsf{GL}(n,\mathbb{R})$ 的一个子群, 称为 $\mathbb{R}$ 上的 n 阶**特殊线性群**.
所有 n 阶实正交方阵的集合

$$\mathsf{O}(n,\mathbb{R}) := \{A \in \mathsf{GL}(n,\mathbb{R}) : A^\mathsf{T} A = AA^\mathsf{T} = I\}$$

构成一个群, 称为 $\mathbb{R}$ 上的 n 阶**正交群**. 我们称

$$\mathsf{SO}(n,\mathbb{R}) := \mathsf{O}(n,\mathbb{R}) \cap \mathsf{SL}(n,\mathbb{R})$$

为 $\mathbb{R}$ 上的 n 阶**特殊正交群**.

一些记号

定义

考虑可逆线性映射 $c : \mathrm{Mat}(p \times n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{pn}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} \mapsto c(A) := (a_{11}, \cdots, a_{p1}, \cdots, a_{1n}, \cdots, a_{pn})$$

得到以下线性空间的同构

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \simeq \mathrm{Mat}(p \times n, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{pn}$$

线性映射的范数

定义

设 $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, 定义其 **Euclid 范数**为

$$\|A\|_{\mathrm{Eucl}} := \|c(A)\| = \sqrt{\sum_{1 \le j \le n} \|Ae_j\|^2} = \sqrt{\sum_{1 \le i \le p, 1 \le j \le n} a_{ij}^2}.$$

引理

对于任意的 $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ 和 $h \in \mathbb{R}^n$,

$$\|Ah\| \le \|A\|_{Eucl} \|h\|.$$

线性映射的范数

注意到

$$\|A\|_{\text{Eucl}}^2 = \sum_{1\le i\le p, 1\le j\le n} a_{ij}^2 = \mathrm{Tr}(AA^t).$$

若 AB, BA 均存在定义, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
在正交变换下, 考虑正交阵 P, Q,

$$Tr((Q^{-1}AP)(Q^{-1}AP)^t) = \mathrm{Tr}(Q^tAPP^tA^tQ)$$
$$=\mathrm{Tr}(Q^tAA^tQ) = \mathrm{Tr}(A^tQQ^tA) = \mathrm{Tr}(A^tA).$$

当 $n = p$ 时, 考虑可逆方阵 P,

$$Tr((P^{-1}AP)(P^{-1}AP)^t) = \mathrm{Tr}(P^{-1}APP^tA^t(P^{-1})^t)$$
$$=\mathrm{Tr}(P^{-1}PAA^tP^t(P^{-1})^t) = \mathrm{Tr}(AA^t).$$

线性映射的范数

定义

设 $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, 定义其 **Operator Norm** 为

$$\|A\| = \sup\{\|Ah\| : h \in \mathbb{R}^n, \|h\| = 1\}.$$

引理

对于任意的 $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ 和 $c \in \mathbb{R}$,

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \quad \|cA\| = |c|\|A\|.$$

2.2

练习.

设 $A \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$ 和 $B \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$. 满足 $\|B-A\| \cdot \|A^{-1}\| < 1$.
证明: $B \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$, 并且 $\|B^{-1}\| \leq \left(\|A\|^{-1} - \|B-A\|\right)^{-1}$.

证明.

对于任意的 $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}\|Bx\| &\geq \|Ax\| - \|(B-A)x\| \geq \|A^{-1}\|^{-1}\|A^{-1}Ax\| - \|(B-A)x\| \\ &= \left(\|A^{-1}\|^{-1} - \|B-A\|\right)\|x\|\end{aligned}$$

这说明 B 为单射, 故可逆. 然后取 $x = B^{-1}y$ 即可. □

引理

$Aut(\mathbb{R}^n)$ 是线性空间 $End(\mathbb{R}^n)$ 中的开集, 即 $GL(n, \mathbb{R})$ 是 $Mat(n, \mathbb{R})$ 中的开集.

证明.

注意到 $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 当且仅当 $\det A \neq 0$. 考虑 $\mathrm{End}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ 的连续函数 $f(A) = \det A$. 因此

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = f^{-1}((-\infty, 0) \cup (0, +\infty))$$

为开集的原象, 因此也为开集. □

伴随

定义

设 $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. A 的**伴随**是指满足如下条件的函数 $A^t : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$: 对所有 $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^p$, 均有 $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^t y \rangle$.

定理

若 $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, 则 A 的伴随 $A^t \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$, 并且 A^t 对应的矩阵是 A 对应的矩阵的转置.

(证明详细过程见 *Linear Algebra Done Right,3E* 7.5)

自伴算子和反自伴算子

定义

$A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ 为**自伴算子**当且仅当对所有 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 均有 $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$. 即 $A = A^t$, 即 A 对应的矩阵为对称矩阵.
$\mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ 上所有自伴算子组成的集合记为 $\mathrm{End}^+(\mathbb{R}^n)$.
$A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ 为**反自伴算子**当且仅当 $A^t = -A$, 即 A 对应的矩阵为反对称矩阵.
$\mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ 上所有反自伴算子组成的集合记为 $\mathrm{End}^-(\mathbb{R}^n)$.

定理

$$End(\mathbb{R}^n) = End^+(\mathbb{R}^n) \oplus End^-(\mathbb{R}^n).$$

Riesz 表示定理

定理 (Riesz 表示定理)

设 φ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的线性函数, 则存在唯一的 $u \in \mathbb{R}^n$ 使得对每个 $v \in \mathbb{R}^n$ 均有 $\varphi(v) = \langle v, u \rangle$.

证明.

先证存在性. 设 $e_1, \cdots, e_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的标准基, 则对每个 $v \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}\varphi(v) &= \varphi(\langle v, e_1 \rangle e_1, \cdots, \langle v, e_n \rangle e_n) \\ &= \langle v, e_1 \rangle \varphi(e_1) + \cdots + \langle v, e_n \rangle \varphi(e_n) \\ &= \langle v, \varphi(e_1) e_1 + \cdots \varphi(e_n) e_n \rangle.\end{aligned}$$

因此, 取 $u = \varphi(e_1) e_1 + \cdots \varphi(e_n) e_n$ 满足条件. □

Riesz 表示定理

证明.

再证唯一性. 设 $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^n$ 使得对每个 $v \in \mathbb{R}^n$ 均有

$$\varphi(v) = \langle v, u_1 \rangle = \langle v, u_2 \rangle.$$

则对每个 $v \in \mathbb{R}^n$ 均有

$$0 = \langle v, u_1 \rangle - \langle v, u_2 \rangle = \langle v, u_1 - u_2 \rangle.$$

取 $v = u_1 - u_2$ 可得 $u_1 - u_2 = 0$. 即 $u_1 = u_2$, 唯一性得证. $\square$

引理

设 $T \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, 则存在唯一的 $\lambda(T) \in End(\mathbb{R}^n)$ 使得对每个 $h, k \in \mathbb{R}^n$ 均有

$$T(h,k) = \langle \lambda(T)h, k \rangle.$$

证明 1.

固定 h, 由 Riesz 表示定理, 存在唯一的 $f(h) \in \mathbb{R}^n$ 使得对每个 $k \in \mathbb{R}^n$ 均有 $T(h,k) = \langle f(h), k \rangle$. 易证 $f(h)$ 为线性映射. $\square$

证明 2.

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) = \mathrm{End}(\mathbb{R}^n).$$

$\square$

映射的微分

定义

设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 设 $a \in U$ 和 $f : U \to \mathbb{R}^p$. 如果存在 $Df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ 使得

$$\lim_{x \to a} \frac{\|f(x) - f(a) - Df(a)(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0,$$

称 f 在 a 处可微, 其中 $Df(a)$ 为 f 在 a 处的微分.
换句话说, 就是存在映射 $\epsilon_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ 满足, 对任意的满足 $a + h \in U$ 的 h,

$$f(a+h) = f(a) + Df(a)h + \epsilon_a(h) \quad \text{with} \quad \lim_{h \to 0} \frac{\|\epsilon_a(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

可微的充要条件

引理

设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 设 $a \in U$ 和 $f: U \to \mathbb{R}^p$. f 在 a 处可微当且仅当存在映射 $\phi_a: U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ 在 a 处连续, 并且满足

$$f(x) = f(a) + \phi_a(x)(x-a).$$

若存在 ϕ_a 满足上述条件, 那么 $\phi_a(a) = Df(a)$.

可微的充要条件

证明.

充分性. 只需验证 $\phi_a(a)$ 为 f 在 a 处的微分即可.
必要性. 构造映射

$$\phi_a(x) = \begin{cases} Df(a) + \dfrac{1}{\|x-a\|^2}\epsilon_a(x-a)(x-a)^t, & x \in U \setminus \{a\}; \\ Df(a), & x = a. \end{cases}$$

直接计算得 $\|\epsilon_a(h)h^t\|_{\text{Eucl}} = \|\epsilon_a(h)\|\|h\|$, 因此

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|\epsilon_a(h)h^t\|_{\text{Eucl}}}{\|h\|^2} = \lim_{h\to 0}\frac{\|\epsilon_a(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

这表明 ϕ_a 在 a 处连续. □

2.44

练习.

对于 $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$, 定义 $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$. 证明: $\det e^A = e^{TrA}$.

证明 1.

考虑 A 的 Jordan 标准形, 设 $A = P\mathrm{diag}(\cdots, J_{m_{ij}}(\lambda_i), \cdots)P^{-1}$, 则 $e^A = P\mathrm{diag}(\cdots, e^{J_{m_{ij}}(\lambda_i)}, \cdots)P^{-1}$, 其中 $e^{J_{m_i j}(\lambda_i)}$ 是对角元素为 e^{λ_i} 的上三角方阵. 故 $\det e^A = \prod_{i,j} e^{m_{ij}\lambda_i} = e^{TrA}$. $\square$

2.44

证明 2.

依次证明以下结论.

- $(D\det)(A)H = \mathrm{Tr}(A^*H) = \langle (A^*)^t, H\rangle$.
- A 可逆时, $(D\det)(A) = \det A(\mathrm{Tr}\circ A^{-1})$.
- $\frac{d}{dt}e^{tX} = e^{tX}X$.
- $e^{tX}e^{-tX} = I$.
- $\frac{d}{dt}\det e^{tX} = \det e^{tX}(\mathrm{Tr}\circ e^{-tX})e^{tX}X = \mathrm{Tr}\, X\det e^{tX}$.
- $\det e^{tX} = e^{t\mathrm{Tr}\, X}$.
- $\det e^{X} = e^{\mathrm{Tr}\, X}$

$\square$

2.45

练习.

我们已经知道了 $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$ 是 $\mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ 的开子集. 定义映射 $F:\mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)\to\mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$, $F(A)=A^{-1}$.
证明: F 为 C^∞ 映射, 并计算各阶微分.

注意到 $A^{-1}=A^*/|A|$, 故 F 是可微的. 考虑 $AF(A)=I$, 微分得 $HF(A)+ADF(A)H=O$, 即 $DF(A)H=-A^{-1}HA^{-1}$.
计算二阶微分需要做一些准备, 定义如下函数:
$G:\mathrm{End}(\mathbb{R}^n)\times\mathrm{End}(\mathbb{R}^n)\to\mathrm{End}(\mathrm{End}(\mathbb{R}^n)), G(A,B)(H)=-AHB$
$\Delta:\mathrm{End}(\mathbb{R}^n)\to\mathrm{End}(\mathbb{R}^n)\times\mathrm{End}(\mathbb{R}^n), \Delta(B)=(B,B)$
因此 $DF=G\circ\Delta\circ F$, 由链式法则, 得到

$$D^2F(A)=DG(A^{-1},A^{-1})\circ\Delta\circ G(A^{-1},A^{-1}).$$

2.45

注意到 Δ 为线性函数, G 为双线性函数.

$$\begin{aligned}
&D^2F(A)(H_1,H_2)\\
=&(DG(A^{-1},A^{-1})\circ\Delta\circ G(A^{-1},A^{-1})H_1)H_2\\
=&DG(A^{-1},A^{-1})(-A^{-1}H_1A^{-1},-A^{-1}H_1A^{-1})(H_2)\\
=&G(-A^{-1}H_1A^{-1},A^{-1})(H_2)+G(A^{-1},-A^{-1}H_1A^{-1})(H_2)\\
=&A^{-1}H_1A^{-1}H_2A^{-1}+A^{-1}H_2A^{-1}H_1A^{-1}.
\end{aligned}$$

类似的, 归纳得到

$$\begin{aligned}
&D^kF(A)(H_1,\cdots,H_k)\\
=&(-1)^k\sum_{\sigma\in S_k}A^{-1}H_{\sigma(1)}A^{-1}H_{\sigma(2)}A^{-1}\cdots A^{-1}H_{\sigma(k)}A^{-1}.
\end{aligned}$$

2.46

注意到 $(I+K)(I-K+\cdots+(-1)^kK^k)=I+(-1)^{k+1}K^{k+1}$.

$$F(I+K)=\sum_{0\le j\le k}(-K)^j+(-K)^{k+1}F(I+K),\quad \|K\|<1.$$

当 $\|H\|<\|A^{-1}\|^{-1}$ 时, 成立

$$\begin{aligned}F(A+H)=&F(I+A^{-1}H)F(A)\\=&\sum_{0\le j\le k}(-A^{-1}H)^jA^{-1}+(-A^{-1}H)^{k+1}F(I+A^{-1}H)F(A)\\=&\sum_{0\le j\le k}(-1)^jA^{-1}HA^{-1}\cdots A^{-1}HA^{-1}+R_k(A,H).\end{aligned}$$

其中 $\|R_k(A,H)\|=o(\|H\|^k)$. 因此即为 F 在 A 点的 Taylor 展开.

2.46

$$D^kF(A)(H^k)=(-1)^k k!A^{-1}HA^{-1}\cdots A^{-1}HA^{-1}.$$

注意到恒等式

$$a_1a_2\cdots a_n=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\sum_{i_1<\cdots<i_k}(a_{i_1}+\cdots+a_{i_k})^n.$$

由于 $D^kF(A)$ 是对称的, 因此其由 $D^kF(A)(H^k)$ 唯一确定. 考虑

$$\begin{aligned}&T(H_1,\cdots,H_k)\\=&(-1)^k\sum_{\sigma\in S_k}A^{-1}H_{\sigma(1)}A^{-1}H_{\sigma(2)}A^{-1}\cdots A^{-1}H_{\sigma(k)}A^{-1}.\end{aligned}$$

由于 $T(H^k)=D^kF(A)(H^k)$, 且 T 是对称的, 因此 $D^kF(A)=T$.

2.62(Morse 函数)

练习.

设函数 $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$. 若 f 的所有临界点 (critical points) 都非退化 (Hessian 矩阵非奇异), 称 f 为 Morse 函数. 证明: Morse 函数 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上的紧集上至多有限个临界点.

我们只需要证明非退化临界点是孤立的, 即对于函数 f 的非退化临界点 x^0, 存在一个开邻域 U, 使得 U 中仅有 x^0 一个非退化临界点. 然后用有限覆盖定理即可得到结论成立.

对于函数 f 任意的非退化临界点 x^0, 不妨设 $x^0 = \mathbf{0}$.

由于 $Hf(x^0)$ 为实对称阵, 存在正交阵 P, 使得 $P^{-1}Hf(x^0)P$ 为对角阵. 考虑正交坐标变换 $x = Py$, 令 $g(y) = f(Py)$, 那么 $Dg(y) = Df(x)P, Hg(y) = P^{-1}Hf(x)P$.

2.62(Morse 函数)

得到 $Hg(y^0) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, 其中 $\lambda_i \neq 0, 1 \leq i \leq n$.
对于 $1 \leq i \leq n$, 由连续性, 存在 $\delta_i > 0$, 使得 $\max\limits_{1\leq k\leq n}(|y_k|) < \delta_i$ 时

$$\left|\frac{\partial^2 g}{\partial y_i^2}(y)\right| > \frac{|\lambda_i|}{2}, \quad \left|\frac{\partial^2 g}{\partial y_i \partial y_j}(y)\right| < \frac{|\lambda_i|}{2n}, \forall j \neq i.$$

取 $\delta = \min\limits_{1\leq i\leq n} \delta_i$. 对于任意满足 $0 < \max\limits_{1\leq k\leq n}(|y_k|) < \delta$ 的 y, 设
$0 < |y_i| = \max\limits_{1\leq k\leq n}(|y_k|) < \delta \leq \delta_i$.

$$\left|\frac{\partial g}{\partial y_i}(y)\right| = \left|\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial g}{\partial y_i}(ty)\mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^1 \sum_{1\leq j\leq n} \frac{\partial^2 g}{\partial y_i \partial y_j}(ty) y_j \mathrm{d}t\right|$$

$$\geq \left|y_i \int_0^1 \frac{\partial^2 g}{\partial y_i^2}(ty)\mathrm{d}t\right| - \sum_{j\neq i}\left|y_j \int_0^1 \frac{\partial^2 g}{\partial y_i \partial y_j}(ty)\mathrm{d}t\right| \geq \frac{|y_i \lambda_i|}{2n} > 0.$$

因此 y 不是 g 的临界点.

Morse 引理

定理 (Morse 引理)

设 U_0 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, $f \in C^k(U_0)$, 其中 $k \geq 3$. 设 $x^0 \in U_0$ 是 f 的非退化临界点, 那么存在 x^0 的开邻域 U_0 和 $\mathbf{0}$ 的开邻域 W, 存在一个从 W 到 U 的 C^{k-2} 微分同胚 φ, 满足 $\varphi(\mathbf{0}) = x^0$, 并且

$$f \circ \varphi(w) = f(x^0) + w_1^2 + \cdots + w_p^2 - w_{p+1}^2 - \cdots - w_n^2 \quad (w \in W).$$

含参变量的常义积分

定理

设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集, J 是 $\mathbb{R}$ 上的闭区间. 设 $f: K \times J \to \mathbb{R}^p$ 为连续映射. 那么映射 $F: K \to \mathbb{R}^p$, 定义为

$$F(x) = \int_J f(x,t)\mathrm{d}t$$

为连续映射. 即对于任意的 $a \in K$, 成立

$$\lim_{x \to a} \int_J f(x,t)\mathrm{d}t = \int_J \lim_{x \to a} f(x,t)\mathrm{d}t.$$

含参变量的常义积分

定理

设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集, 有非空内部 U. 设 J 是 $\mathbb{R}$ 上的闭区间. 设 $f: K \times J \to \mathbb{R}^p$ 为连续映射, 设 $f: K \times J \to \mathbb{R}^p$ 为为满足以下条件的映射.

- f 连续.
- f 关于 U 中变元的微分 $D_1 f: U \times J \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ 连续.

那么映射 $F: U \to \mathbb{R}^p$, 定义为 $F(x) = \int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ 为可微映射且满足

$$D \int_J f(x,t)\mathrm{d}t = \int_J D_1 f(x,t)\mathrm{d}t.$$

含参变量的反常积分

定义

设 A 是 $\mathbb{R}^n$ 中的子集, $J=[c,+\infty)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的无限区间. 设 $f:A\times J\to\mathbb{R}^p$ 为连续映射. 设存在连续映射 $F:A\to\mathbb{R}^p$, 定义为

$$F(x)=\int_J f(x,t)\mathrm{d}t.$$

若对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $D>c$, 使得对任意 $x\in A$ 和 $d\geq D$, 成立

$$\left|F(x)-\int_c^d f(x,t)\mathrm{d}t\right|<\varepsilon,$$

称 $\int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ 在 A 上**一致收敛**.

含参变量的反常积分

定理

设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集, $J=[c,+\infty)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的无限区间. 设 $f:K\times J\to\mathbb{R}^p$ 为连续映射. 设存在映射 $F:K\to\mathbb{R}^p$, 定义为

$$F(x)=\int_J f(x,t)\mathrm{d}t,$$

并且 $\int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ 在 K 上一致收敛.
那么 F 是连续映射, 即对于任意的 $a\in K$, 成立

$$\lim_{x\to a}\int_J f(x,t)\mathrm{d}t=\int_J \lim_{x\to a} f(x,t)\mathrm{d}t.$$

含参变量的反常积分

定理

设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集, 有非空内部 U. 设 $J=[c,+\infty)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的无限区间. 设 $f:K\times J\to\mathbb{R}^p$ 为为满足以下条件的映射.

- f 连续并且 $\int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ 收敛.
- f 关于 U 中变元的微分 $D_1 f: U\times J\to\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$ 连续.
- 存在函数 $g: J\to[0,+\infty)$ 使得对任意 $(x,t)\in U\times J$ 有 $\|D_1 f(x,t)\|_{Eucl}\leq g(t)$, 并且 $\int_J g(t)\mathrm{d}t$ 收敛.

那么映射 $F:U\to\mathbb{R}^p$, 定义为 $F(x)=\int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ 为可微映射且满足

$$D\int_J f(x,t)\mathrm{d}t=\int_J D_1 f(x,t)\mathrm{d}t.$$

例

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}.$$

引入收敛因子 e^{-xt}, 定义 $F(x)=\int_0^{+\infty}e^{-xt}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t, x\in[0,+\infty)$.
对于任意的 $a>0$, 当 $x>a$ 时, 有 $|D_1f(x,t)|=|e^{-xt}\sin t|\le e^{-at}$, 在 $(a,+\infty)$ 上, 有

$$F'(x)=-\int_0^{+\infty}e^{-xt}\sin t\mathrm{d}t=-\frac{1}{1+x^2}.$$

由 a 的任意性, 得到 $F(x)=c-\arctan x, \forall x>0$.
考虑 $F\left(\frac{x}{p}\right)=\int_0^{+\infty}e^{-xt}\frac{\sin pt}{t}\mathrm{d}t, \forall p>0$.
令 $p\to 0^+$, 得到 $c-\frac{\pi}{2}=0$, 因此 $F(x)=\frac{\pi}{2}-\arctan x$, 进而

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=F(0)=\frac{\pi}{2}.$$